



# Signaux et Systèmes : TP1

## Rappels

Année académique 2009-2010

## 1 Enoncé

### 1.1 Analyse en continu

#### 1.1.1 Impulsion rectangulaire

Considérons le signal de la Figure 1(a). On demande :

1. Calculer la transformée de Fourier du signal rectangulaire en fonction du paramètre  $\tau$ .
2. Représenter graphiquement ce spectre et calculer la coordonnée du premier zéro en fonction de  $\tau$ .
3. Interpréter l'allure de ce spectre en fonction du paramètre  $\tau$ . Comment peut-on relier la solution de ce problème aux cas extrêmes du pic de Dirac et du signal constant ?

#### 1.1.2 Filtre passe-bas idéal

On désire réaliser un filtre passe-bas idéal dont la caractéristique est similaire à celle d'une impulsion rectangulaire mais dans le domaine fréquentiel (figure 1(b)). On demande :

1. Trouver la forme temporelle du filtre passe-bas.
2. Comparer à la solution de 1.1.1. Justifier.

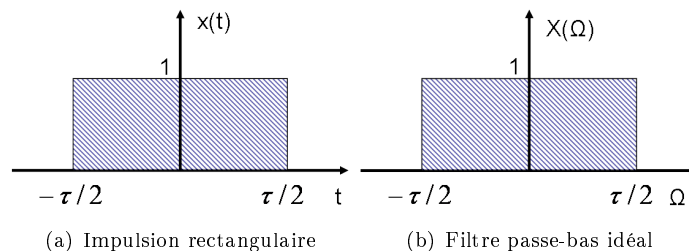


FIG. 1 –

#### 1.1.3 Modulation des signaux

La représentation en fréquence est essentielle puisqu'elle représente l'information contenue dans un signal. Une application pratique est la modulation des signaux. La modulation en amplitude (AM) consiste à transmettre un signal selon une porteuse (de fréquence beaucoup plus élevée) variant en amplitude.

Soit  $m(t)$  le signal à transmettre (de fréquence  $f_m$ ) et  $p(t) = A_c \cos(\Omega_c t)$  la porteuse (où  $\Omega_c = 2\pi f_c$ ,  $f_c \gg f_m$ ) Le signal modulé en amplitude  $s(t)$  (figure 2) est donné par :

$$s(t) = p(t) \cdot m(t) + p(t) = A_c(1 + m(t))\cos(2\pi f_c t) \quad (1)$$

Nous obtenons donc un nouveau signal qui oscille à la fréquence de la porteuse et dont l'amplitude est modulée à la (aux) fréquence(s) du signal à transmettre (enveloppe). Le processus de démodulation consiste alors à effectuer une détection d'enveloppe.

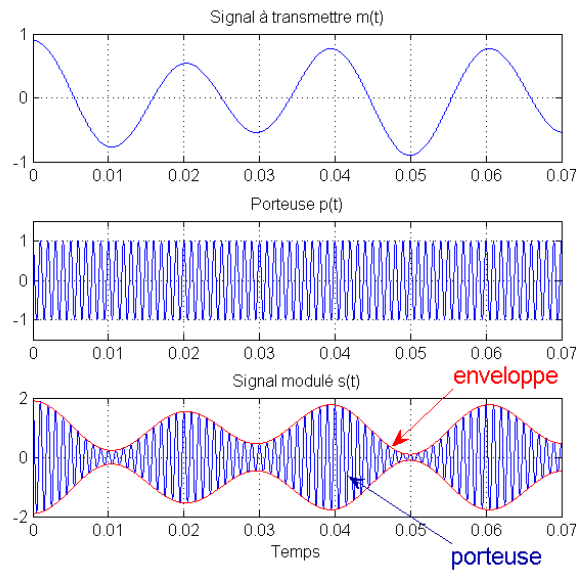


FIG. 2 – Modulation AM

Soit un signal  $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$  avec  $f_c \gg f_m$ , on demande :

1. Trouver et tracer le spectre de ce signal
2. Quel est l'effet de la multiplication par  $A_c \cos(2\pi f_c t)$  ?
3. Que se passe-t-il si l'information transmise est proche d'une impulsion rectangulaire ?

## 1.2 Analyse en discret

### 1.2.1 Choix du CAN

Soit la chaîne d'acquisition représentée à la Figure 3.

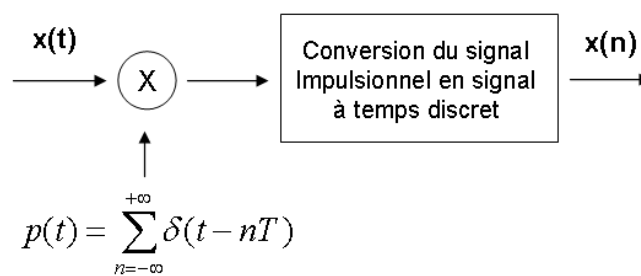


FIG. 3 – Chaîne d'acquisition

La première gamme de musique (DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, DO) s'étend de 130Hz à 260Hz. On désire réaliser une table de montage sonore basique. Pour ce faire, on veut numériser les signaux de la première gamme. On a le choix entre deux convertisseurs analogique-numérique. Le premier possède une fréquence d'échantillonnage de 800Hz et le deuxième possède une fréquence d'échantillonnage de 400Hz. On demande :

1. Représenter un LA (220Hz) en continu (avant le convertisseur) puis en discret (après le convertisseur) pour le premier convertisseur.
2. L'information utile du spectre discret se trouve entre 0 et  $f_s/2$ . Interpréter cette affirmation.

3. Refaire l'exercice pour le second convertisseur. Quelle fréquence va-t-on analyser si on se limite à la plage de fréquence entre 0 et  $f_s/2$ ? Justifier ce phénomène.

### 1.2.2 Filtre en peigne

Nous avons vu qu'il était très important de travailler sur le contenu fréquentiel des signaux. Une des applications les plus importantes du traitement du signal est le filtrage. Par une opération de filtrage, il est possible de supprimer un bruit, une partie d'information fréquentielle (ex : compression d'image et du son), ... Soit un filtre en peigne :

$$y(n) = x(n) - x(n - L) \quad (2)$$

On demande :

1. Ce filtre est-il récursif?
2. Déterminer la réponse en fréquence.
3. Représenter l'amplitude  $|H(e^{j\omega})|$  et la phase de ce système pour  $L = 8$ .
4. La phase du filtre est-elle linéaire? Quelle est la conséquence d'une phase linéaire sur un signal d'entrée du type  $\sin(\omega t)$ ?

Soit un signal continu donné par  $f(t) = 2\cos(2\pi 500t) + 0.5\cos(2\pi 1000t) + 3\cos(2\pi 1500t)$  que l'on échantillonne à 8000Hz. On demande :

1. Représenter le spectre du signal continu et échantillonné.
2. Que vaut le signal à la sortie du filtre (tenir compte de l'amplitude et de la phase du filtre)

### 1.2.3 Chaîne de transmission

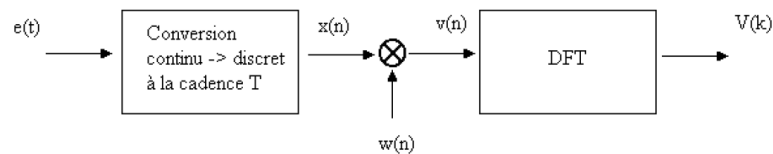


FIG. 4 – Chaîne de transmission

- On propose de travailler sur une chaîne de transmission représentée à la figure 4 dans laquelle :
- La période d'échantillonnage  $T$  vaut  $0.125ms$ .
  - $w(n)$  est une fenêtre rectangulaire de longueur  $N = 16$  définie par :

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad W(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2} \quad (3)$$

- Le signal d'entrée est  $e(t) = \cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 3000t)$

On demande :

1. Calculer la transformée de Fourier de  $x(n)$  (vous pouvez vous limiter à l'intervalle  $\omega \in [-\pi, \pi]$ )
2. Calculer la transformée de Fourier de  $v(n)$  (vous pouvez vous limiter à l'intervalle  $\omega \in [-\pi, \pi]$ )
3. Tracer l'allure de  $|V(e^{j\omega})|$
4. Quelle est l'utilité d'une fenêtre d'observation lorsque l'on travaille en numérique?
5. Déterminer les coefficients  $V(k)$  de la DFT de  $v(n)$  pour  $k = 1 \dots 15$
6. Quelle est l'influence de la longueur de la DFT (plus grand que 16)? Quelles sont les possibilités afin d'augmenter ce nombre d'échantillons?

## Quelques formules utiles

### Transformée de Fourier d'un signal continu

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\Omega\tau} d\tau \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

Signal	Transformée de Fourier
1	$2\pi\delta(\Omega)$
$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$\cos(\Omega_0 t)$	$\pi(\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0))$

### Convolution

Dans le domaine temporel :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \Rightarrow Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

Dans le domaine fréquentiel :

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)H(\Omega - \tau)d\tau \Rightarrow y(t) = h(t)x(t)$$

### Transformée de Fourier d'un signal discret

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \text{et} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

### Transformée de Fourier discrète (DFT) d'un signal discret

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{et} \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

## 2 Corrigés TP1

### 2.1 Analyse en continu : Impulsion rectangulaire

La transformée de Fourier du signal rectangulaire est donnée par :

$$\begin{aligned}
 X(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\Omega t} dt \\
 &= \left[ -\frac{1}{j\Omega} e^{-j\Omega t} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = -\frac{1}{j\Omega} \left[ e^{-j\Omega\tau/2} - e^{j\Omega\tau/2} \right] \\
 &= \frac{2}{\Omega} \sin(\Omega\tau/2) = \tau \operatorname{sinc}(\Omega\tau/2)
 \end{aligned} \tag{4}$$

où  $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$  (sinus cardinal)

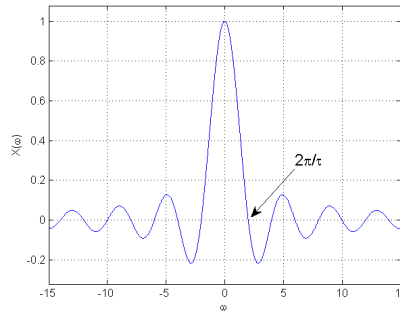


FIG. 5 – Spectre  $X(\Omega)$

Le spectre a une longueur infinie.

La coordonnée du premier zéro est  $2\pi/\tau$ . Si, à présent, on modifie la valeur de  $\tau$ , on obtient :

- pour  $\tau \rightarrow 0$  (pic de Dirac) : le spectre tend à être plat
- pour  $\tau \rightarrow \infty$  (signal constant) : le spectre tend à être un pic de Dirac

### 2.2 Analyse en continu : Filtre passe-bas idéal

La forme temporelle du filtre passe-bas idéal est obtenue en appliquant la transformée de Fourier inverse, à savoir :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j\Omega t} d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{jt} e^{j\Omega t} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{1}{j2\pi t} \left[ e^{j\tau/2} - e^{-j\tau/2} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi t} \sin(t\tau/2) = \frac{\tau}{2\pi} \operatorname{sinc}(t\tau/2)
 \end{aligned} \tag{5}$$

En comparant avec la relation 4, on remarque que l'on obtient une expression duale. Il s'agit en fait de l'illustration de la propriété de la dualité de la transformée de Fourier.

### 2.3 Analyse en continu : Modulation des signaux

Le spectre de  $s(t)$  peut être calculé rapidement de différentes manières :

1. soit en appliquant la propriété dite « de modulation » :  $x(t)e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(\Omega - \Omega_0)$

$$\begin{aligned}
 s(t) &= A_c(1 + m(t)) \left( \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} \right) = \frac{A_c}{2} \left( e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t} + m(t) \cdot e^{j2\pi f_c t} + m(t) \cdot e^{-j2\pi f_c t} \right) \\
 \Rightarrow S(\Omega) &= \frac{A_c}{2} \left( 2\pi\delta(\Omega - \Omega_c) + 2\pi\delta(\Omega + \Omega_c) + M(\Omega - \Omega_c) + M(\Omega + \Omega_c) \right)
 \end{aligned} \tag{6}$$

2. soit en se rappelant qu'une multiplication de deux signaux dans le domaine temporel correspond à une convolution dans le domaine fréquentiel.

$$S(\Omega) = P(\Omega) + P(\Omega) \otimes M(\Omega) \quad (7)$$

avec :

$$P(\Omega) = A_c \pi \left( \delta(\Omega - \Omega_c) + \delta(\Omega + \Omega_c) \right) \quad (8)$$

$$P(\Omega) \otimes M(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\Omega) M(\Omega - v) dv = \frac{A_c}{2} \left( M(\Omega - \Omega_c) + M(\Omega + \Omega_c) \right)$$

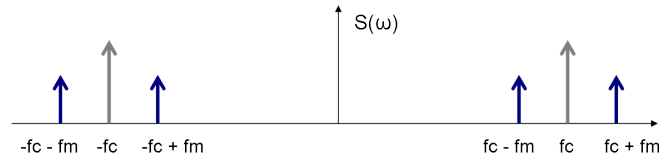


FIG. 6 – Spectre du signal modulé

Nous constatons que le spectre du signal avant modulation a été décalé autour de la fréquence de la porteuse  $f_c$ . La bande passante  $B$  du signal correspond à la gamme de fréquence utilisée, c'est-à-dire  $B = 2f_m$ .

Enfin, le spectre d'un signal rectangulaire est infini (voir exercice 1.1.1). La modulation de ce signal donnera donc lieu à une pollution fréquentielle (recouvrement spectral).

## 2.4 Analyse en discret : Choix du CAN

### 2.4.1 1<sup>er</sup> CAN

Le spectre du signal continu comprend une raie à  $220Hz$  et une seconde raie image en  $-220Hz$ . La seule information utile étant  $220Hz$ , lorsqu'on analyse le spectre, on considère seulement les fréquences entre 0 et  $f_s/2$ . Le spectre du signal échantillonné se répète à chaque multiple de la fréquence d'échantillonnage  $f_s$ . La conversion analogique-numérique n'a donc pas tronqué le signal.

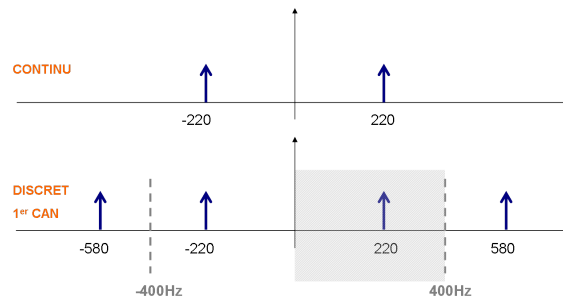


FIG. 7 – Convertisseur 1 ( $f_s = 800Hz$ )

### 2.4.2 2<sup>e</sup> CAN

En ce qui concerne le second CAN, on constate que la fréquence que l'on observe entre 0 et  $f_s/2$  n'est plus  $220Hz$  mais bien  $180Hz$ . Il s'agit tout simplement de l'illustration du théorème de l'échantillonnage qui stipule que la fréquence d'échantillonnage doit être choisie de telle sorte à ce qu'elle soit supérieure au double de la fréquence maximale du signal continu.

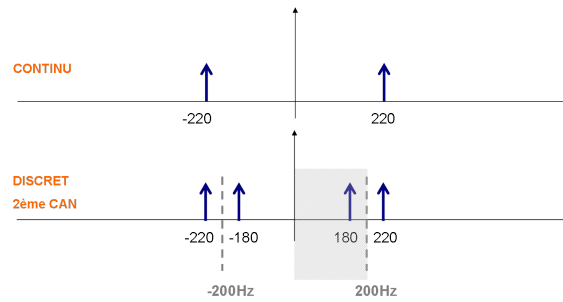


FIG. 8 – Convertisseur 2 ( $f_s = 400Hz$ )

## 2.5 Analyse en discret : Filtre en peigne

L'équation aux différences de ce filtre est :

$$y(n) = x(n) - x(n - L) \quad (9)$$

Ce filtre est non-récurif car sa sortie ne dépend pas des valeurs précédentes (pas de  $y(n - 1)$  par exemple).

### 2.5.1 Réponse en fréquence

La réponse en fréquence du filtre est donnée par :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 - e^{-j\omega L} = |H(e^{j\omega})| e^{j\text{Arg}(H(e^{j\omega}))} \quad (10)$$

L'amplitude est donnée par :

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{(1 - \cos(\omega L))^2 + \sin^2(\omega L)} = \sqrt{2 - 2\cos(\omega L)} = 2 |\sin(\omega L/2)| \quad (11)$$

La phase est quant à elle déterminée comme suit :

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j\omega L} = e^{-j\omega L/2} (e^{j\omega L/2} - e^{-j\omega L/2}) \\ &= 2je^{-j\omega L/2} \sin(\omega L/2) \\ \Rightarrow \text{Arg}(H(e^{j\omega})) &= \pi/2 - \omega L/2 \end{aligned} \quad (12)$$

On constate que la phase est linéaire. Ainsi, si la phase est linéaire, un signal de type  $\sin(\omega t)$  à l'entrée du filtre sera du type  $\sin(\omega t + \phi) = \sin(\omega t + k\omega) = \sin(\omega(t + k))$  à la sortie. La linéarité de la phase implique donc un délai du signal.

### 2.5.2 Réponse au signal $f(t)$

Soit le signal continu  $f(t)$  que l'on échantillonne à  $f_s = 1/T_s = 8000Hz$  :

$$f(t) = 2\cos(2\pi 500t) + 0.5\cos(2\pi 1000t) + 3\cos(2\pi 1500t) \quad (13)$$

On remarque premièrement que la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée afin d'éviter le repliement spectral. Les spectres dans le domaine continu et discret sont donnés à la figure 10.

En sortie de filtre, le signal sera modifié comme suit :

$f$	$\omega = \Omega T_s = 2\pi f T_s$	$ H(e^{j\omega}) $	$\text{Arg}(H(e^{j\omega}))$
500	$\pi/8$	2	0
1000	$\pi/4$	0	$-\pi/2$
1500	$3\pi/8$	2	0

Le signal de sortie sera :

$$f_o(t) = 4\cos(2\pi 500t + 0.) + 6\cos(2\pi 1500t) \quad (14)$$

La composante 1000 Hz a donc été supprimée.

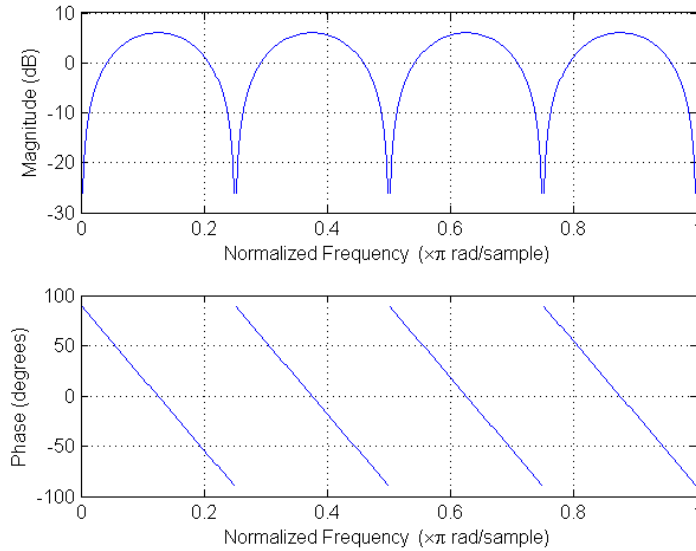


FIG. 9 – Réponse en fréquence

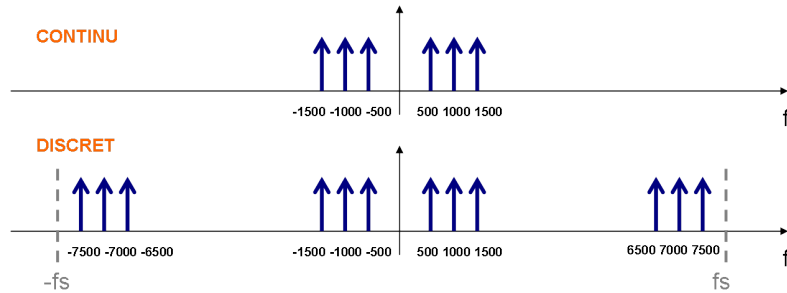


FIG. 10 – Spectres du signal continu et discret

## 2.6 Analyse en discret : Chaîne de transmission

### 2.6.1 Transformée de Fourier de $x(n)$

$$X(e^{j\omega}) = \pi \left[ \delta(\omega - \pi/4) + \delta(\omega + \pi/4) + \delta(\omega - 3\pi/4) + \delta(\omega + 3\pi/4) \right] \quad (15)$$

### 2.6.2 Transformée de Fourier de $v(n)$

Le signal  $v(n)$  est obtenu en multipliant dans le domaine temporel le signal  $x(n)$  par une fenêtre rectangulaire  $w(n)$ . Il s'ensuit une convolution dans le domaine fréquentiel.

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) \otimes W(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2} \left( W(\omega - \pi/4) + W(\omega + \pi/4) + W(\omega - 3\pi/4) + W(\omega + 3\pi/4) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

### 2.6.3 Coefficients $V(k)$ de la DFT ( $k = 1 \dots 15$ )

La DFT de longueur  $N$  correspond à une estimation de la transformée de Fourier en un nombre fini  $N$  de points ( $\approx$  échantillonnage fréquentiel). L'algorithme DFT étant applicable à un nombre  $N$  fini d'échantillons, une fenêtre d'observation doit être utilisée.

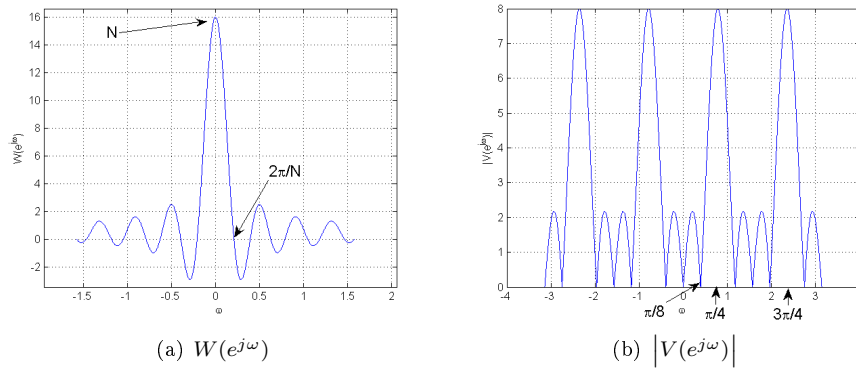


FIG. 11 – Spectre de  $w(n)$  et de  $v(n)$

$$\begin{aligned}
 V(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} v(n)e^{-j\omega n} \\
 V(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} v(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = V(e^{j\omega})\Big|_{\omega=k2\pi/N}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

On constate donc sur la figure 11(b) que seuls les coefficients  $V(k)$ ,  $k = 2, 6$  sont non nuls et valent tous deux  $N/2 = 8$ . Si à présent on augmente le nombre de points, on affine la discrétisation de la transformée de Fourier et la DFT sera dès lors plus précise. Cette augmentation du nombre d'échantillons de la DFT peut être mise en oeuvre de deux manières différentes : soit on utilise une fenêtre d'observation plus longue, soit on prolonge la séquence  $v(n)$  par des zéros et on calcule une DFT de longueur  $L$  plus grande.